

MATEMATIKA EKONOMI

Oleh:

Husnayetti

Dosen STIE Ahmad Dahlan Jakarta

DIFERENSIAL

Diferensial mempelajari tentang tingkat perubahan rata-rata atau tingkat perubahan seketika dari suatu fungsi

Metode Kalkulus ini dikembangkan oleh Isaac Newton dari Inggris dan Gottfried dari Jerman.

Newton mengembangkan dibidang fisika

Gottfried mengembangkan dibidang matematika

Tingkat Perubahan Rata-Rata

Tingkat perubahan rata-rata dari suatu fungsi $Y=f(x)$ adalah perubahan pada variabel terikat Y yang diakibatkan oleh perubahan satu unit dalam variabel bebas X

Derivatif atau turunan pertama

Adalah suatu cara mengukur perubahan seketika dari suatu fungsi aljabar atau dikenal juga dengan derivatif pertama atau turunan pertama.

Notasi yang digunakan untuk derivatif adalah dY/dX (oleh **Leibniz**) bukan menunjukkan pembagian melainkan suatu instruksi atau perintah matematika untuk mencari derivatif Y terhadap X . Proses pencarian derivatif tersebutlah yang dinamakan diferensiasi

Penulisan lain derivatif adalah $f'(X)$ oleh **Lagrange**

Jadi derivatif dari suatu fungsi menyatakan atau mengukur tingkat perubahan seketika dari variabel terikat Y sebagai akibat perubahan variabel bebas x yang sangat kecil.

ATURAN DERIVATIF

1. Fungsi konstan

Derivatif dari suatu fungsi konstan sama dengan nol

Contoh : $Y = 15$, maka $dY/dX = 0$

2. Fungsi pangkat

$Y = X^n$, maka $dY/dX = n X^{n-1}$

Contoh : $Y = X^6$, $dY/dX = 6 X^5$

3. Konstanta kali dengan fungsi pangkat

$$Y = k X^n$$

$$dY/dX = n k X^{n-1}$$

Contoh

$$Y = 3 X^4, \text{ maka } dY/dX = 12 X^3$$

4. Penjumlahan atau pengurangan fungsi

$$Y = f(X) + g(X),$$

$$dY/dX = f^1(X) + g^1(X),$$

Contoh:

$$Y = 3x^5 - 8x, \text{ maka } dY/dX = 15 X^4 - 8$$

5. Hasil kali fungsi

$Y = U \cdot V$, diman $U=f(x)$ dan $V=g(x)$

$$dY/dX = UV' + VU'$$

Contoh :

$$Y = (X^2+4)(X+3)$$

$$dY/dX = (X^2+4)(1) + (X+3)(2X)$$

$$dY/dX = (X^2+4) + 2X^2 + 6X$$

$$dY/dX = 3X^2 + 6X + 4$$

DERIVATIF KEDUA

Jika derivatif pertama $f^1(x)$ mempunyai derivatif lagi terhadap x , maka derivatif ini disebut derivatif kedua yang disimbokan dengan d^2Y/dx^2 atau $f^{11}(x)$

Contoh diketahui sautu fungsi $Y=X^3-2X^2-5x-3$

Hitunglah turunan pertama dan kedua dari fungsi tersebut.

$$f^1(x) = 3x^2-4x-5 \text{ dan } f^{11}(x) = 6x - 4$$

PENERAPAN DIVERENSIAL

Penerapannya mencakup :

- Fungsi produksi
- Fungsi biaya,
- Fungsi penerimaan,
- Keuntungan, Kerugian dan BEP
- Fungsi utility
- Elastisitas harga permintaan
- Elastisitas produksi

Fungsi Produksi

- Fungsi produksi adalah suatu fungsi yang menunjukkan hubungan antara input yang digunakan dengan tingkat produksi yang dihasilkan dalam proses produksi.
- Secara matematis dapat ditulis :

$$Q = f (L, K, \dots)$$

Avarage Product

- Produksi Rata-rata (*Avarage Product*)/ AP yaitu total produksi dibagi dengan jumlah input

$$AP = \frac{TP}{L}$$

Marginal Product

Marginal produk adalah berapa besarnya tambahan produksi apabila ada tambahan satu unit input (L)

MP merupakan turunan pertama dari fungsi TP (Total Produksi)

MP = Marginal Product

$$MP = \frac{\Delta TP}{\Delta L}$$

Menentukan TP max, MP max dan AP max

Syarat untuk mencapai kondisi maksimum
adalah :

1. TP max

- a. Turunan pertamanya = 0 atau $TP^1 = 0$
- b. Turunan keduanya < 0 atau $TP^{11} < 0$

Menentukan TP max, MP max dan AP max

2. MP maximum :

a. Turunan pertama dari MP = 0 atau
 $MP^1=0$

b. Turunan kedua dari MP < 0 atau $MP^{11} < 0$

Menentukan TP max, MP max dan AP max

3. AP maksimum :

a. Jika turunan pertama dari $AP = 0$ atau $AP^1=0$

b. Turunan kedua dari $AP < 0$ atau $AP^{11} < 0$

Contoh:

Seorang produsen mempunyai fungsi produksi

$$TP=Q = -1/3 L^3 + 5L^2$$

Tentukanlah :

- a. Berapa input L yang harus digunakan agar produksinya maksimum
- b. Berapa besarnya produksi maksimum tersebut ?
- c. Berapa input L yang harus digunakan agar marginal produknya maksimum?

Contoh:

- d. Berapa input L yang digunakan agar produksi rata-ratanya maksimum ?
- e. Berapa banyaknya produksi rata-rata maksimum tersebut ?

FUNGSI BIAYA

Biaya yang dikeluarkan oleh si produsen terdiri dari biaya tetap dan biaya variabel.

Secara matematis dapat ditulis :

$$TC = FC + VC$$

Dalam fungsi biaya ada beberapa istilah :

1. $AC = \text{Average Cost}$ / Biaya rata-rata
2. $MC = \text{Marginal Cost}$ / tambahan biaya sebagai akibat menambah produksi satu unit.
3. $AFC = \text{Average Fixed Cost}$ /Biaya tetap rata-rata
4. $AVC = \text{Average Variable Cost}$ / Biaya variabel rata-rata

Istilah dalam fungsi biaya

$$AC = \frac{TC}{Q}$$

$$MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q}$$

$$AFC = \frac{FC}{Q}$$

$$AVC = \frac{VC}{Q}$$

$$Q = \text{output}$$

Contoh :

Seorang produsen memiliki fungsi biaya variabel yang ditunjukkan oleh persamaan $VC=50Q$ sedangkan biaya tetapnya sebesar Rp. 100.000.000

Tentukanlah :

- a. Fungsi biaya totalnya, $TC = 100.000.000 + 50Q$
- b. Fungsi biaya marginalnya, $MC = 50$
- c. Jika ia memproduksi 1.000 unit berapa biaya total pada tahun tersebut dan berapa biaya rata-ratanya.

$$AC = TC/Q = 100.000.000/Q + 50 = 100.050$$

Seorang produsen akan mengeluarkan biaya sebesar Rp. 100.000 walaupun ia tidak menghasilkan barang satu unitpun. Biaya variabel yang harus ia keluarkan ditunjukkan oleh persamaan $VC = 1/3Q^3 - 5Q^2 + 50Q$. Tentukanlah :

- a. Fungsi biaya total, $TC = 100.000 + 1/3Q^3 - 5Q^2 + 50Q$
- b. Fungsi biaya marginal, $MC = Q^2 - 10Q + 50$
- c. Fungsi biaya tetap rata-rata $AFC = 100.000/Q$
- d. Fungsi biaya variabel rata-rata $= AVC = (1/3Q^3 - 5Q^2 + 50Q)/Q$,
 $AVC = 1/3Q^2 - 5Q + 50$, $dAVC/dQ = 2/3 Q - 5 = 0$
- e. $2/3 Q = 5$, $Q = 5/2/3 = 3/2 \times 5 = 15/2 = 7,5$
- f. Fungsi biaya rata-rata, $AC = (100.000 + 1/3Q^3 - 5Q^2 + 50Q)/Q$
 $AC = 100.000/Q + 1/3Q^2 - 5Q + 50$
- f. Agar biaya variabel rata-ratanya minimum berapa kuantitas barang yang harus diproduksi dan berapa besarnya biaya rata-rata minimum tersebut

g. Berapa biaya marginal minimumnya dan pada saat yang sama berapa jumlah barang yang ia harus produksi .

$$MC = Q^2 - 10Q + 50$$

$$MC' = 2Q - 10 = 0$$

$$2Q = 10$$

$$Q = 5$$

$$MC = 25 - 50 + 50$$

$$MC = 25$$

Revenue/TR

- Penerimaan adalah hasil yang akan diperoleh oleh produsen ketika ia menjual produknya dipasar.
- Besar kecilnya penerimaan tergantung pada banyak sedikitnya jumlah barang yang terjual
- Secara matematis dapat ditulis :

$$TR = f(Q)$$

TR = Total revenue

Q = jumlah barang yang terjual

$$TR = P \cdot Q$$

Dimana P = harga

Istilah-istilah dalam Fungsi Penerimaan

1. $MR = \text{Marginal Revenue}$: besarnya perubahan pada penerimaan apabila produsen menjual tambahan 1 unit produknya.
2. $AR = \text{Average Revenue}$: besarnya penerimaan oleh produsen untuk setiap unit barang yang terjual ?pendapatan rata-rata

$$TR = P \times Q$$

$$MR = \frac{\Delta TR}{\Delta Q}$$

$$AR = \frac{TR}{Q}$$

Dalam ilmu ekonomi dikenal beberapa macam pasar diantara adalah pasar persaingan sempurna dan Monopoli

Pasar Persaingan Sempurna

Dalam pasar persaingan sempurna seorang produsen tidak bisa menentukan harga, ia sebagai pengambil harga (*Price taker*) jadi harga merupakan sesuatu yang given/tetap

$$TR = P \times Q$$

$$MR = \frac{d TR}{dQ} = P$$

$$AR = \frac{TR}{Q} = \frac{P \cdot Q}{Q} = P$$

Contoh :

- Seorang produsen dalam pasar persaingan sempurna memiliki fungsi penerimaan $TR = 100Q$
 - a. Fungsi penerimaan marginalnya, $MR = 100$
 - b. Fungsi penerimaan rata-rata, $AR = 100Q/Q = 100$
 - c. Apabila ia menjual 5 unit, berapa total penerimaannya ? $TR = 100 \times 5 = 500$

Pasar Monopoli

Dalam pasar monopoli seorang produsen bisa menentukan harga jual dari barang yang dihasilkannya. Dia sebagai penentu harga (*price maker*)

Penerimaan maks terjadi saat :

1. $MR = 0$ atau $TR' = 0$
2. $dMR/dQ < 0$ atau $MR' < 0$

Seorang produsen memiliki fungsi penerimaan total yang ditunjukkan oleh persamaan $TR = -2Q^2 + 40Q$

Tentukanlah :

a. Fungsi penerimaan marginal = $MR = -4Q + 40$

b. Fungsi penerimaan rata-rata = $AR = -2Q + 40$

$$AR = -2(5) + 40 = -10 + 40 = 30$$

a. Apabila produsen menjual sebanyak 5 unit barang, berapa total penerimaan rata-ratanya (AR)

b. Berapa besarnya total penerimaan maksimum, dan pada saat yang sama berapa jumlah barang yang harus dijual, $MR = 0$

$$MR = -4Q + 40 = 0, -4Q = -40, Q = -40 / -4 = 10$$

Keuntungan, Kerugian dan BEP

Dalam menjalankan usahanya produsen bisa saja mengalami kerugian, untung atau BEP.

$$\pi = TR - TC$$

$$\pi > 0, \text{ untung}$$

$$\pi < 0, \text{ Rugi}$$

$$\pi = 0, \text{ BEP}$$

Profit Maksimum

Profit maksimum terjadi pada saat $MR=MC$

Untuk mencapai profit maksimum tersebut
bisa dengan cara :

$$\frac{d\pi}{dQ} = 0 \text{ atau } \frac{d^2\pi}{d^2Q} < 0$$

Seorang produsen mempunyai biaya variabel yang ditunjukkan oleh persamaan $VC = 1/3Q^3 - 5Q^2 + 40Q$ sedangkan besarnya biaya tetap adalah Rp. 200. Produsen tersebut menghadapi fungsi permintaan pasar yang ditunjukkan oleh persamaan $P = -Q + 88$

Ditanya :

- a. Agar profitnya maksimum berapa jumlah barang yang harus di produksi
- b. Berapa besarnya profit maksimum tersebut
- c. Apabila produsen menjual 15 unit barangnya di pasar berapa besarnya TR, TC dan keuntungan total.

Fungsi Utilitas

Tinggi rendahnya utilitas yang diterima tergantung banyak sedikitnya barang yang dikonsumsi

Secara matematis dapat ditulis

$$TU = f(Q)$$

TU = utilitas total

Q = kuantitas barang

Marginal Utility

MU = Tambahan utility yang diterima sebagai akibat bertambahnya konsumsi satu unit

$$MU = \frac{dTU}{dQ}$$

TU maksimum jika :

$$MU = 0 \text{ atau } TU' = 0$$

Seorang konsumen memiliki fungsi total utilitas yang ditunjukkan oleh persamaan

$$TU = - \frac{1}{2}Q^2 + 10 Q$$

ELASTISITAS PERMINTAAN DAN PENAWARAN

Konsep elastisitas secara umum adalah :

Sebagai perubahan prosentase suatu variabel terikat sebagai akibat adanya perubahan prosentase suatu variabel bebas

Untuk **elastisitas permintaan** berarti kita mengukur perubahan prosentase jumlah barang yang diminta sebagai akibat adanya perubahan prosentase harga barang itu sendiri.

Untuk elastisitas penawaran berarti kita mengukur perubahan prosentase jumlah barang yang ditawarkan oleh produsen sebagai akibat perubahan prosentase pada harga barang itu sendiri

Elastisitas Permintaan

Permintaan terhadap suatu barang dipengaruhi oleh banyak faktor (harga barang itu sendiri, harga barang lain, pendapatan, selera dll), namun dalam menentukan elastisitas permintaan dianggap bahwa hanya satu faktor saja yang mempengaruhi permintaan yaitu harga barang itu sendiri, secara matematis dapat ditulis : $Q_{dx} = f(P_x)$

Defenisi elastisitas harga dari permintaan ini secara matematis adalah perubahan prosentase jumlah barang yang diminta oleh konsumen dibagi dengan perubahan prosentase dari harga barang itu sendiri

$$Ed = \frac{\text{Perubahan prosentase jml brg x yg diminta}}{\text{Perubahan prosentase harga barang x}}$$

$$E_d = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \times \frac{P}{Q}$$

Nilai elastisitas harga dari permintaan

Jika $E_d < 1$, tidak elastis (in-elastis)

Jika $E_d = 1$, Elastis uniter

Jika $E_d > 1$, elastis

Jika $E_d = 0$, in elastis sempurna

Jika $E_d = \infty$, elastis sempurna

Contoh :

Fungsi permintaan akan barang ditunjukkan oleh persamaan $Q_dX = -2P_X + 10$. Jika harga barang X per unit Rp. 2,- berapa besarnya elastisitas harga permintaannya, apa arti

Diketahui fungsi permintaan akan barang X ditunjukkan oleh persamaan $Q_x = -P^2_x - P_x + 20$. Tentukan besarnya elastisitas harga pada saat harga barang x per unitnya Rp. 3 .

Jika harga barang Y Rp. 5,- berapa besarnya elastisitas permintaan apabila fungsi permintaannya $Q_y = P^2_y - 14 P_y + 48$

Elastisitas Produksi (η_p)

Elastisitas produksi adalah elastisitas yang mengukur kepekaan perubahan produksi suatu barang sebagai akibat berubahnya input yang digunakan untuk memproduksi barang tersebut.

$$\eta_p = \frac{\% \Delta TP}{\% \Delta L}$$

$$\eta_p = \frac{\Delta TP / TP}{\Delta L / L}$$

$$\eta_p = \frac{dTP}{dL} \times \frac{L}{TP}$$

Contoh :

Seorang produsen mempunyai fungsi produksi yang ditunjukkan oleh persamaan $TP = -\frac{1}{3}L^3 + 5L^2$. Apabila produsen tersebut menggunakan input L sebanyak 9 satuan carilah elastisitasnya .